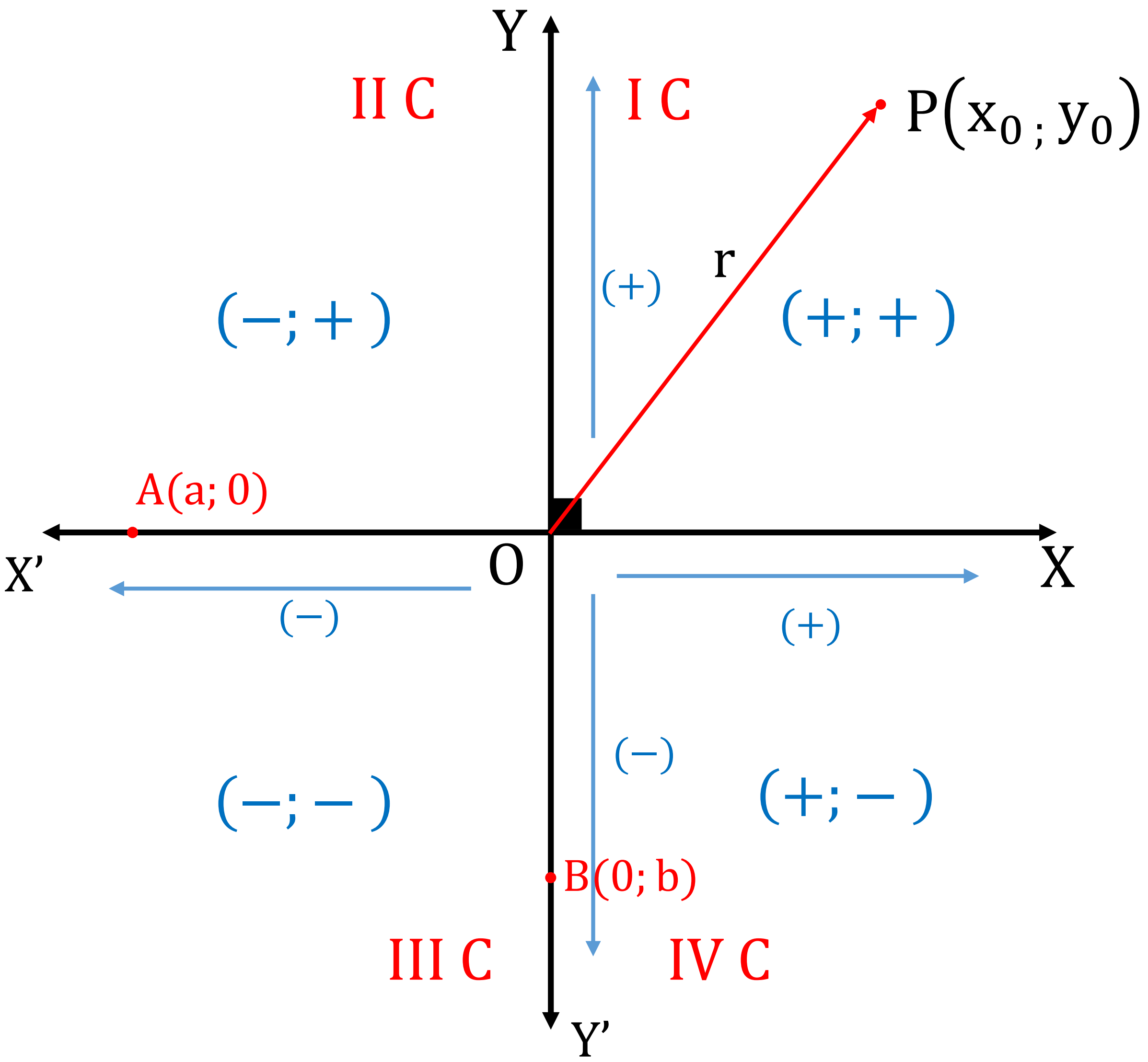
Profesor:
Jonathan Cumpa Velásquez

TRIGONOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

PITAGORAS ACADEMIA

1.-Plano coordenado:



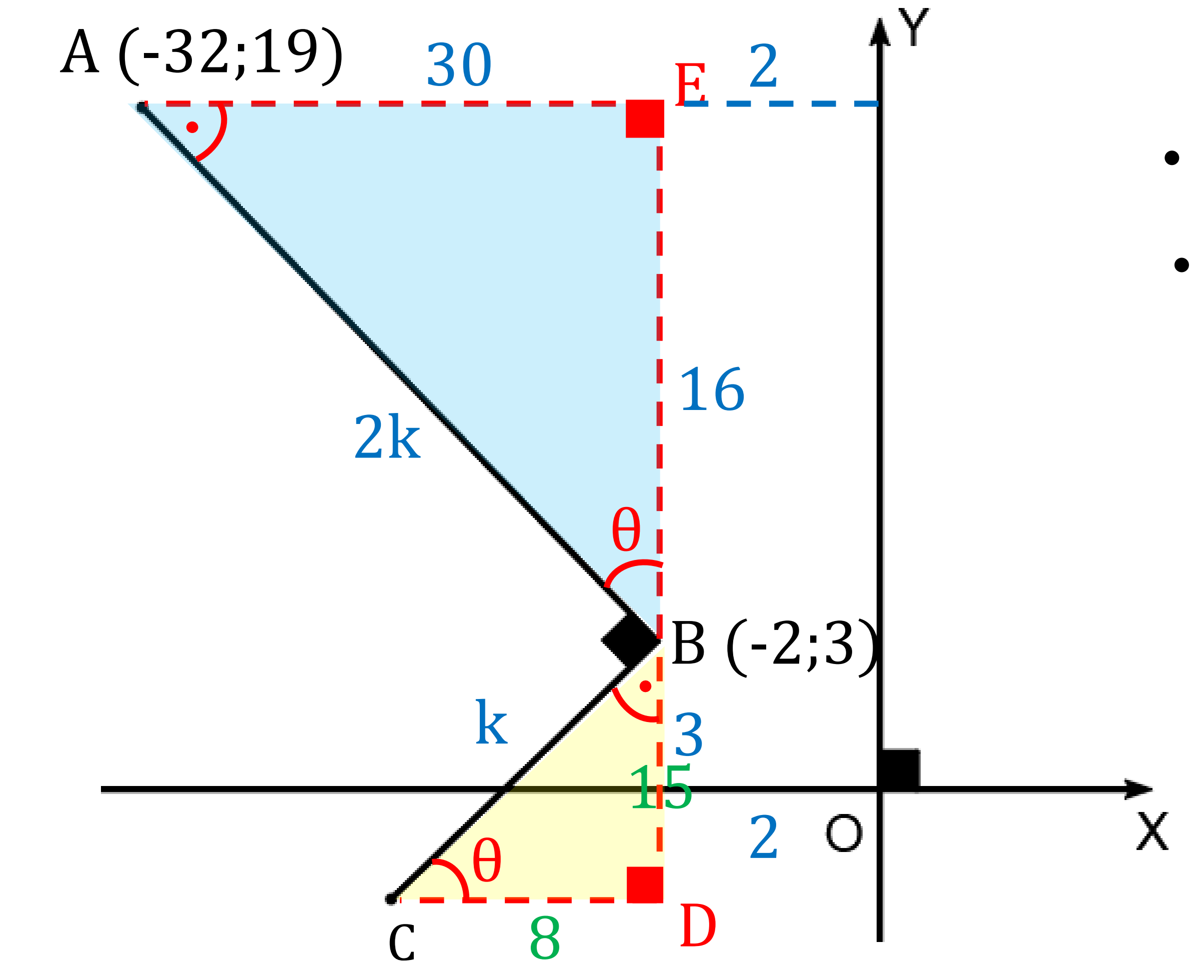
- $\overleftrightarrow{X'X}$: Eje de abscisas
- $\overleftrightarrow{Y'Y}$: Eje de ordenadas
- $O(0;0)$: Origen de coordenadas rectangulares
- $P(x_0\,;y_0)$: Par ordenado
- $x_0 \wedge y_0$: Coordenadas de P
- $A(a;0) \in \overleftrightarrow{X'X}$
- $B(0;b) \in \overleftrightarrow{Y'Y}$
- $\overrightarrow{OP}$: Radio Vector

$$\boxed{r = \sqrt{(x_0)^2 + (y_0)^2}} \; ; r > 0$$

1.1.-Ejemplo:

Si AB=2(BC), calcular las coordenadas del punto C.

A) (-10;-12) B) (-17;-15) C) (-12;-17) D) (-11;-12) E) (-8;-15)



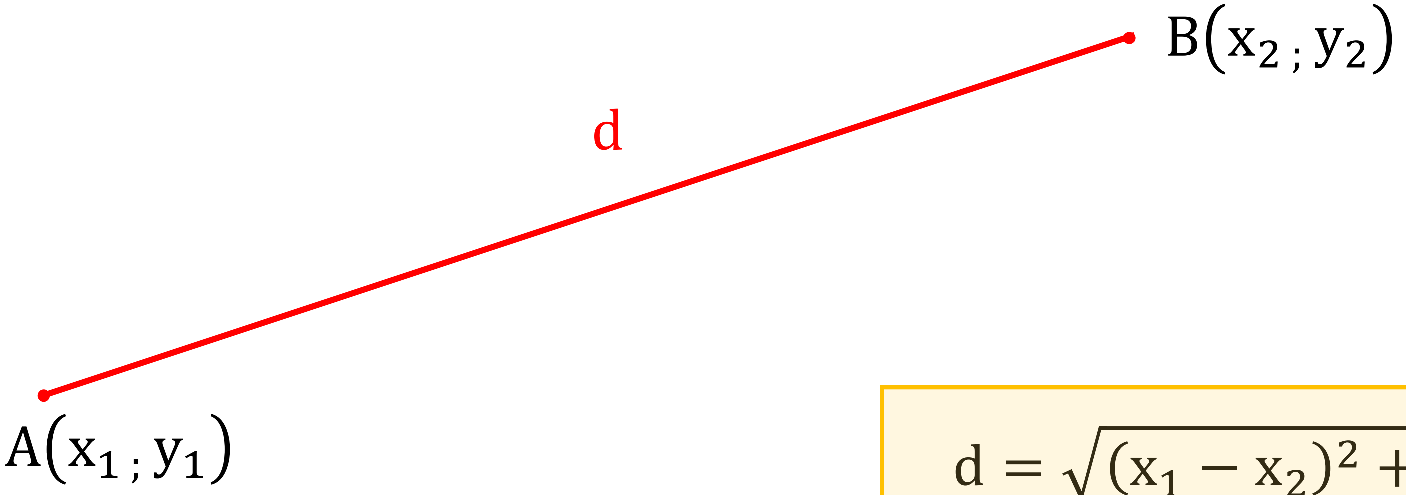
- Se traza $\overline{DE} \parallel \overleftrightarrow{y'y}$
- Se traza $\overline{CD} \wedge \overline{AE} \parallel \overleftrightarrow{x'x}$ $\Longrightarrow$ $\triangle CDB \sim \triangle BEA$

$$\frac{BD}{AE} = \frac{CD}{BE} = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} BD = 15 \\ CD = 8 \end{cases}$$

$$\therefore C(-10; -12)$$

CLAVE: A

2.-Distancia entre 2 puntos:

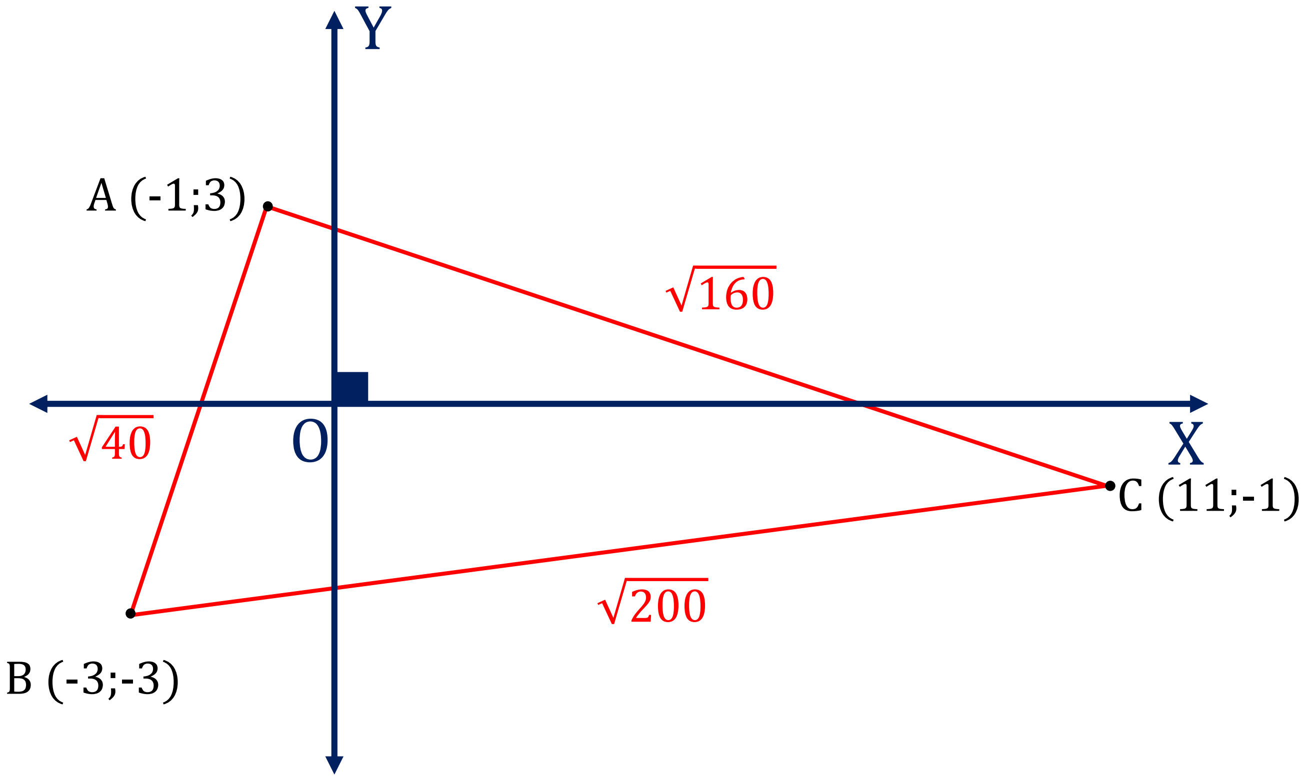


$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2.1.-Ejemplo:

Que tipo de triángulo, determinan los puntos A(-1;3), B(-3;-3) y C(11;-1)

A) Isósceles B) Equilátero C) Escaleno D) Rectángulo E) Rectángulo isósceles



✓ $AB = \sqrt{\left(-1-(-3)\right)^2 + \left(3-(-3)\right)^2}$

$AB = \sqrt{2^2 + 6^2} \Longrightarrow AB = \sqrt{40}$

✓ $AC = \sqrt{(-1-11)^2 + \left(3-(-1)\right)^2}$

$AC = \sqrt{(-12)^2 + 4^2} \Longrightarrow AC = \sqrt{160}$

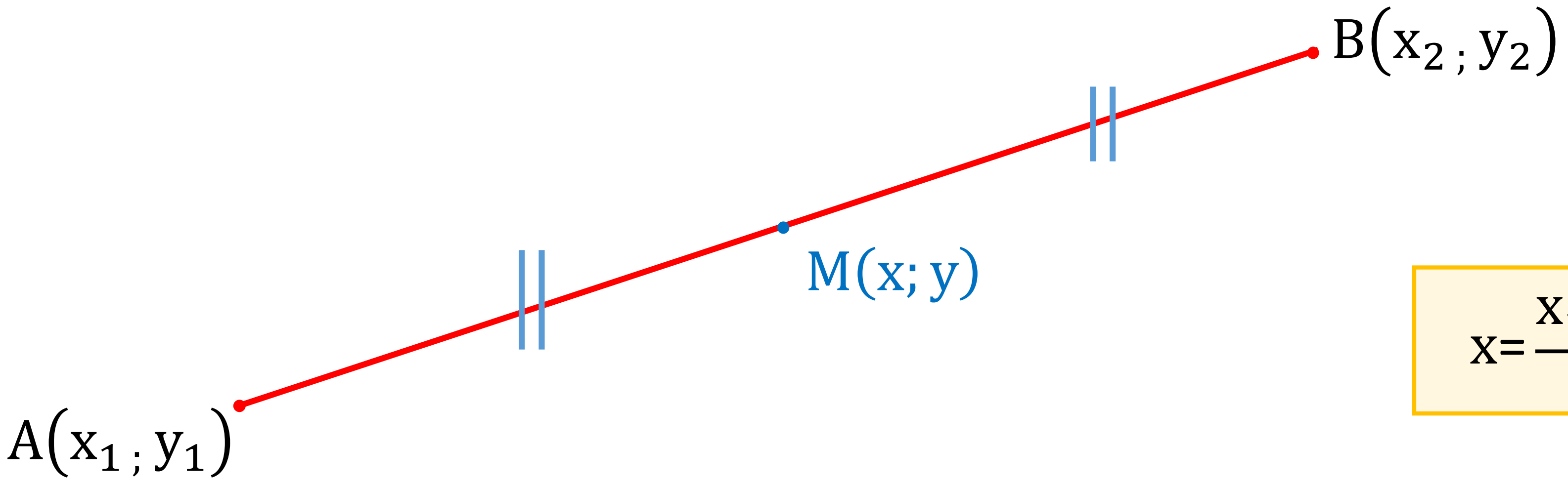
✓ $BC = \sqrt{(-3-11)^2 + \left(-3-(-1)\right)^2}$

$BC = \sqrt{(-14)^2 + (-2)^2} \Longrightarrow BC = \sqrt{200}$

- Se verifica: $BC^2 = AC^2 + AB^2$

$\therefore$ Triángulo rectángulo CLAVE: D

3.-Coordenadas del punto medio:



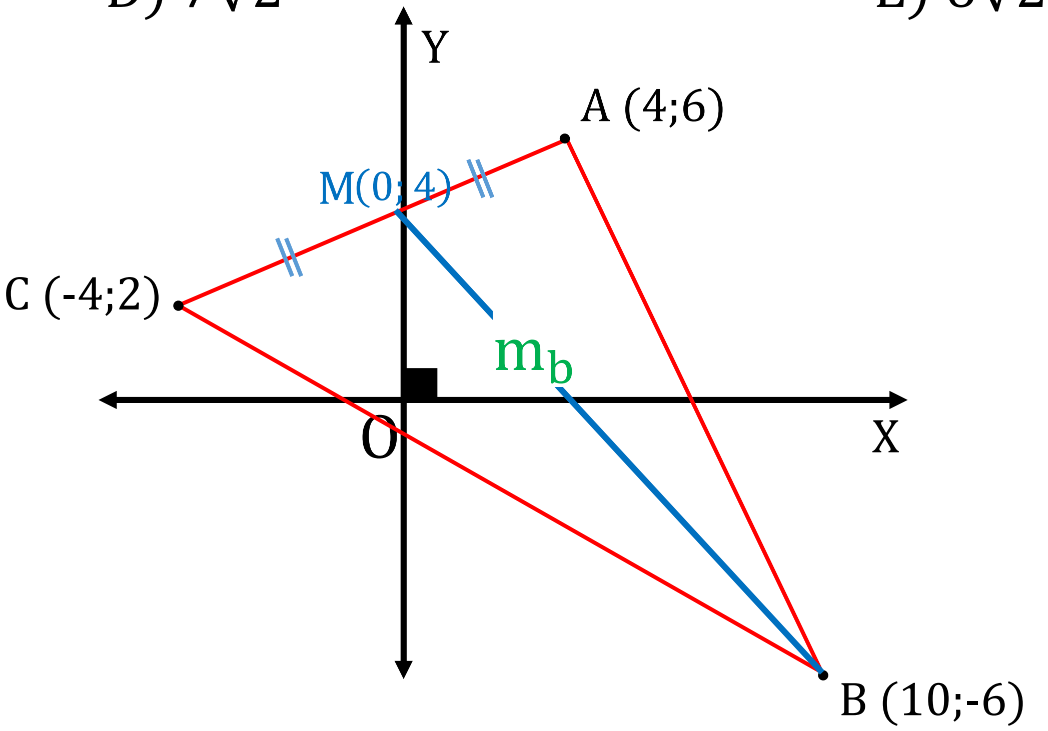
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

3.1.-Ejemplo:

Los vértices de un triangulo son A(4;6),B(10;-6) y C(-4;2). Hallar la longitud de la mediana de B a $\overline{AC}$

~~A)~~ $10\sqrt{2}$ B) $9\sqrt{2}$ C) $8\sqrt{2}$
D) $7\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$



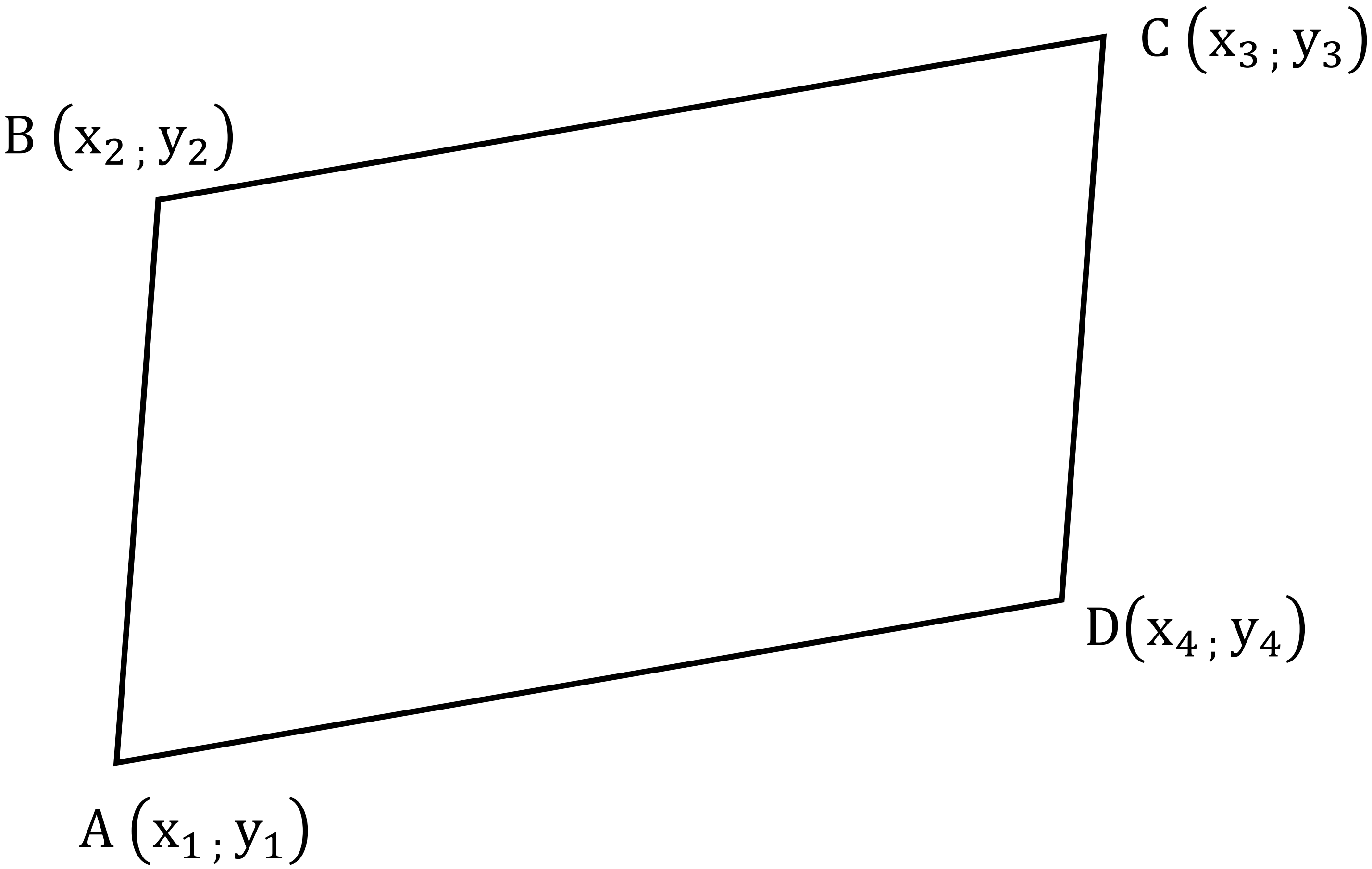
✓ Coordenadas de M:

$$M\left(\frac{-4+4}{2};\frac{2+6}{2}\right) \Longrightarrow M(0;4)$$

✓ $m_b = \sqrt{(10-0)^2+(-6-4)^2} \Longrightarrow m_b = 10\sqrt{2}$

CLAVE: A

4.-Propiedad del paralelogramo:



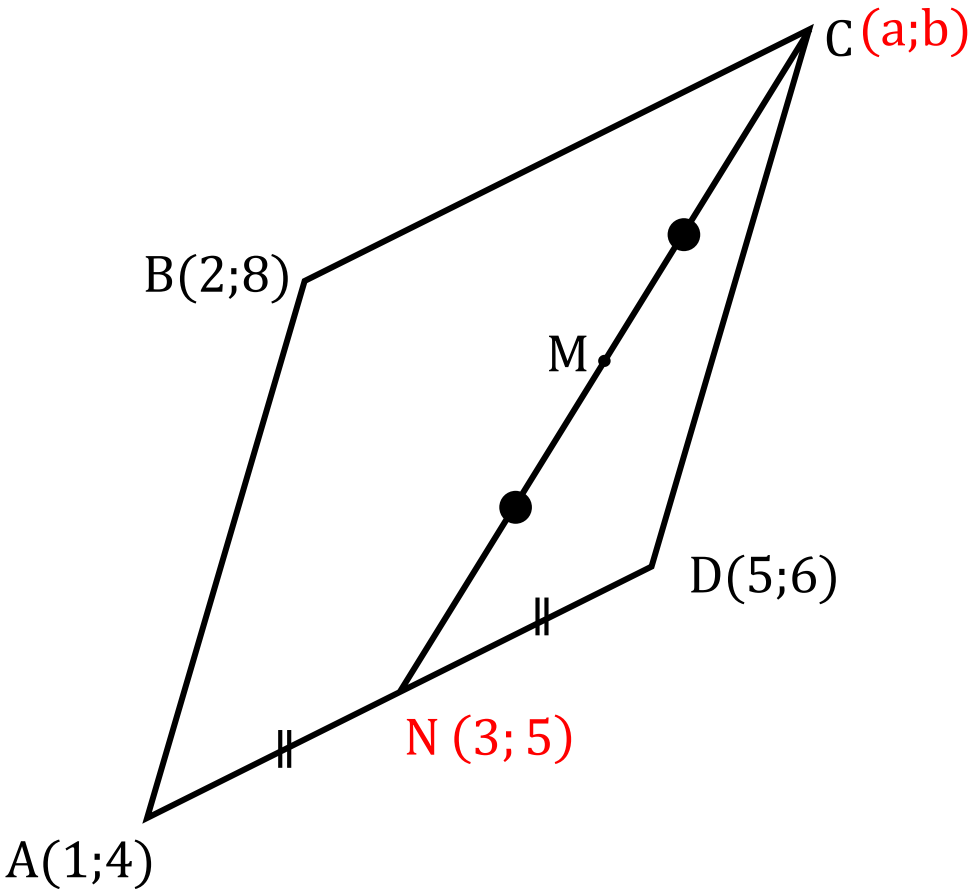
$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$$

$$y_1 + y_3 = y_2 + y_4$$

4.1.-Ejemplo:

En el esquema mostrado, determine las coordenadas de "M" si ABCD es un paralelogramo.

A) $\left(\frac{3}{2};\frac{15}{2}\right)$ B) $\left(\frac{9}{2};\frac{7}{2}\right)$ ~~C)~~ $\left(\frac{9}{2};\frac{15}{2}\right)$ D) $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ E) $\left(\frac{11}{2};\frac{17}{2}\right)$



✓ Hallando C: Paralelogramo

- $1+a = 2+5 \Longrightarrow a=6$
- $4+b = 8+6 \Longrightarrow b=10$

✓ Hallando N: Punto medio

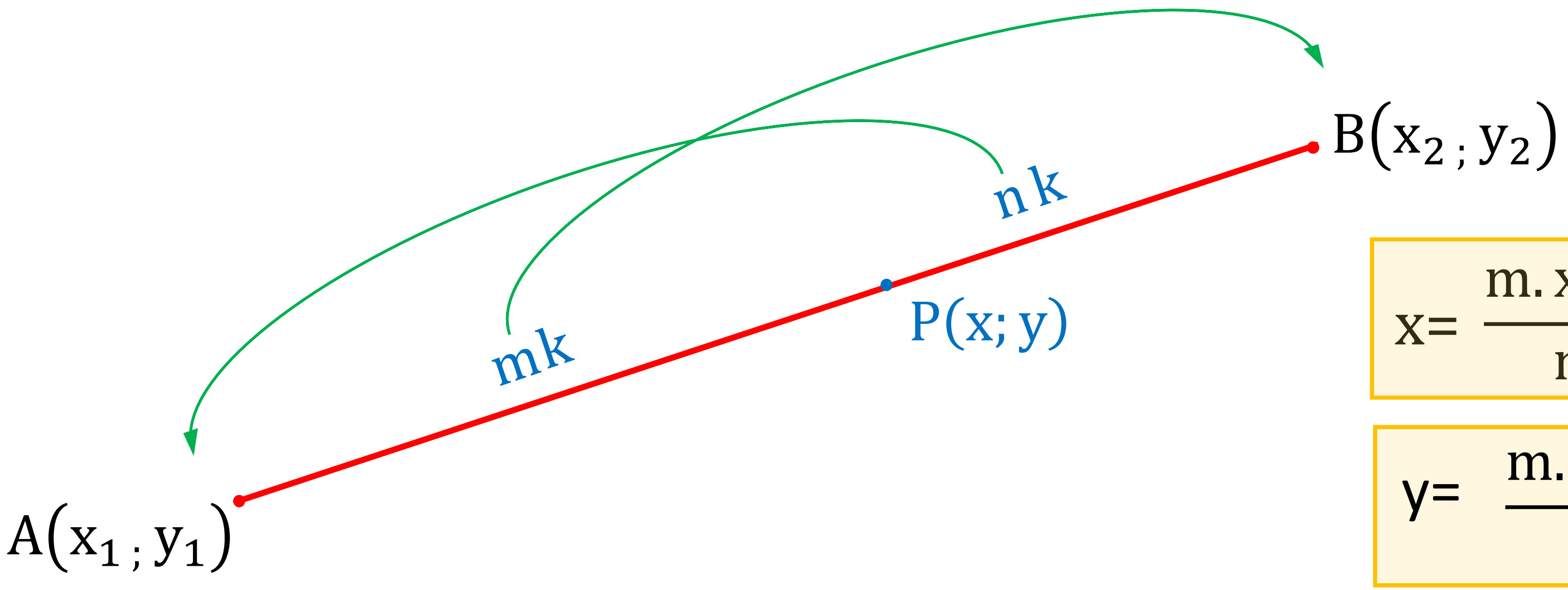
$$N\left(\frac{1+5}{2};\frac{4+6}{2}\right) \Longrightarrow N(3;5)$$

✓ Hallando M: Punto medio de $\overline{NC}$

$$M\left(\frac{3+6}{2};\frac{5+10}{2}\right) \Longrightarrow M\left(\frac{9}{2};\frac{15}{2}\right)$$

CLAVE: C

5.-Coordenadas del punto que divide a un segmento en una razón dada:



$$x = \frac{m.x_2 + n.x_1}{m+n}$$

$$y = \frac{m.y_2 + n.y_1}{m+n}$$

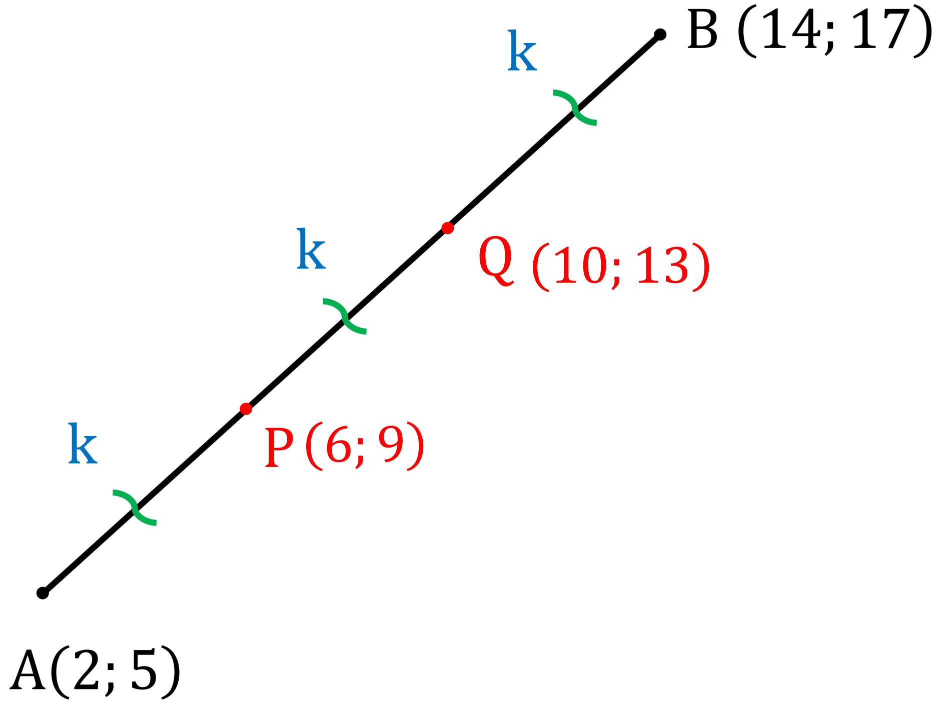
❖ OBSERVACIÓN:

$$P\left(\frac{m(x_2;y_2) + n(x_1;y_1)}{m+n}\right)$$

5.1.-Ejemplo:

Dado los puntos A(2;5) y B(14;17), determine las coordenadas de los puntos que trisecan al segmento AB.

A) (5;9) y (10;13) B) (6;9) y (12;15) C) (8;10) y (10;13)
D) (6;9) y (10;13) E) (6;9) y (12;14)



✓ Hallando P: P divide a $\overline{AB}$ en la razón de 1 a 2

$$P\left(\frac{1(14;17)+2(2;5)}{1+2}\right) \Longrightarrow P\left(\frac{(14;17)+(4;10)}{3}\right)$$

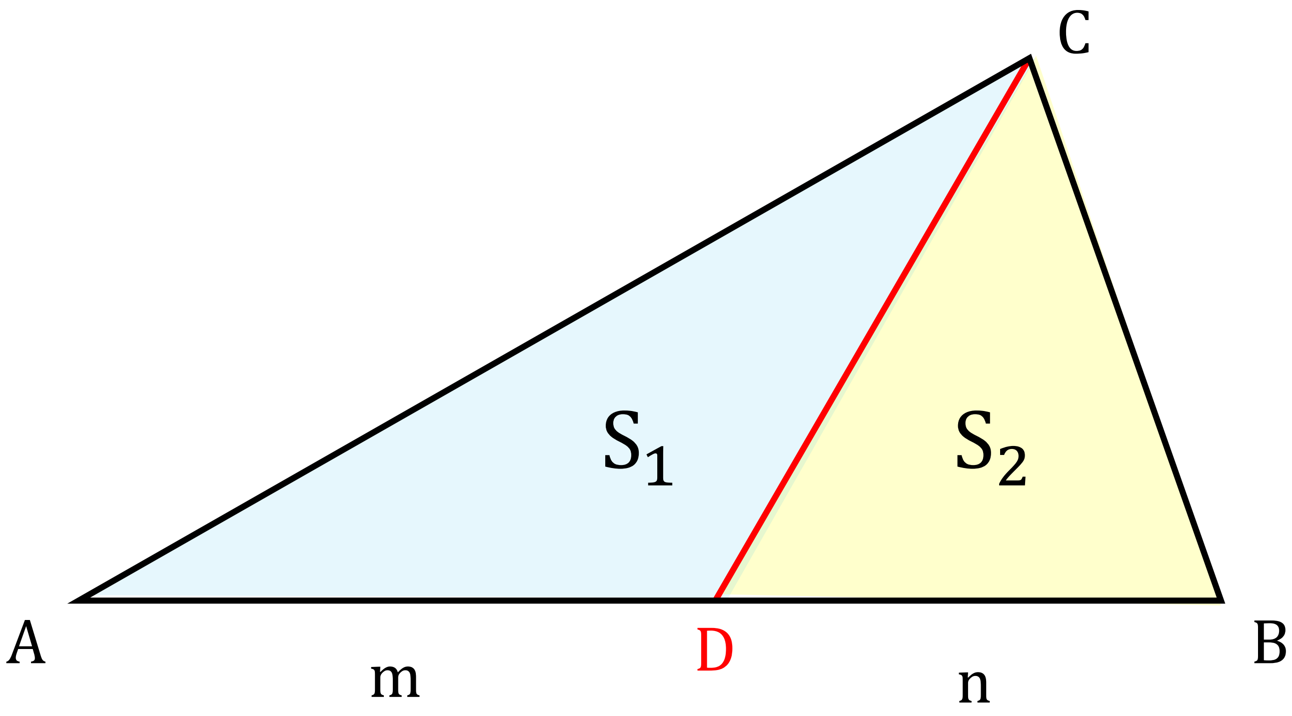
$$P\left(\frac{(18;27)}{3}\right) \Longrightarrow P(6;9)$$

✓ Hallando Q: Q es punto medio de $\overline{PB}$

$$Q\left(\frac{6+14}{2};\frac{9+17}{2}\right) \Longrightarrow Q(10;13)$$

CLAVE: D

Nota 1:

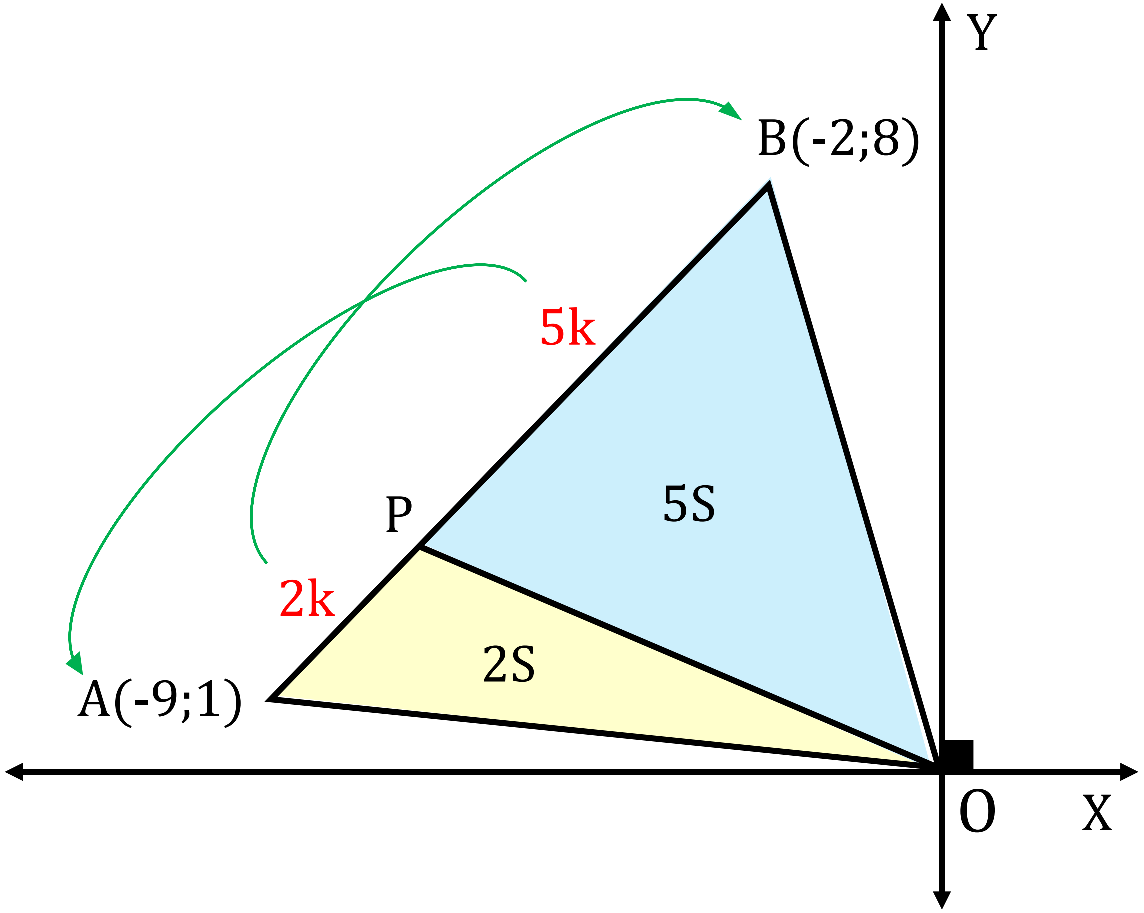


$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$$

Ejemplo:

De la figura, determine las coordenadas del punto P.

A) (-3;2) B) (-5;2) C) (-4;5) D) (-8;3) ~~E)~~ (-7;3)



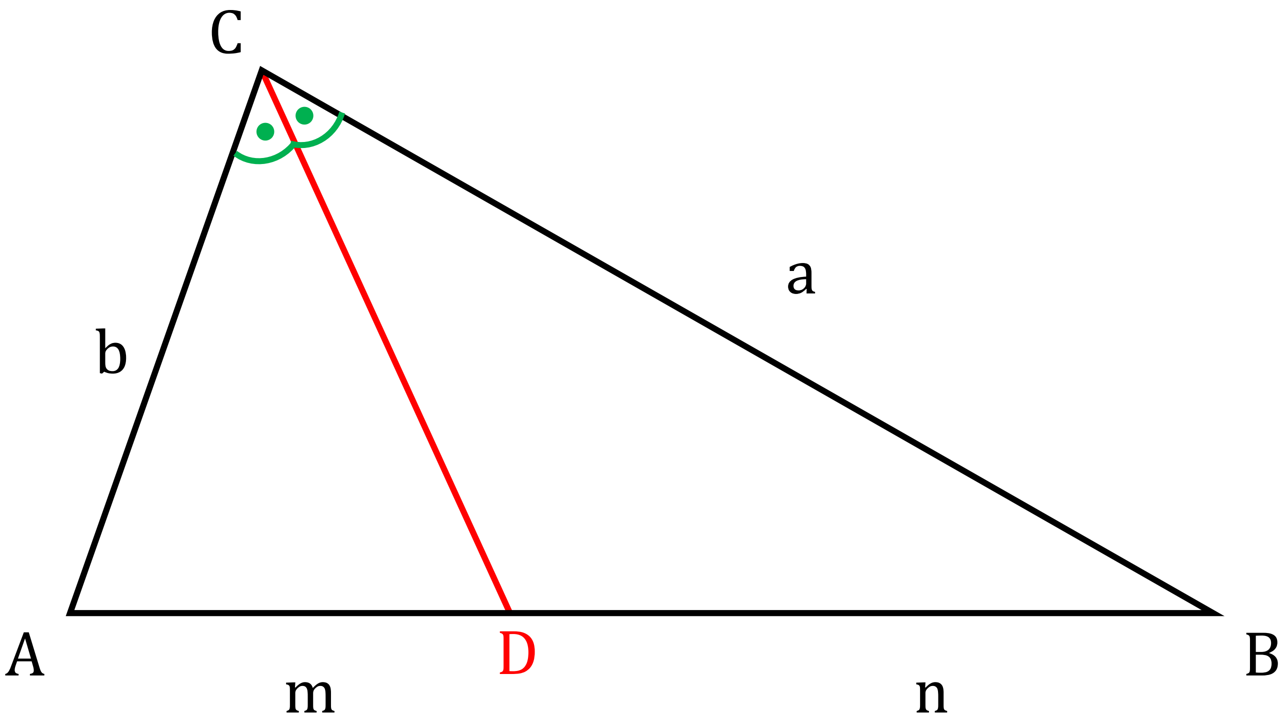
$$P\left(\frac{2(-2\,;8)+5(-9;1)}{2+5}\right)$$

$$P\left(\frac{(-4;16)+(-45;5)}{7}\right)$$

$$P\left(\frac{(-49;21)}{7}\right) \Longrightarrow P(-7;3)$$

CLAVE: E

❖ Nota 2:

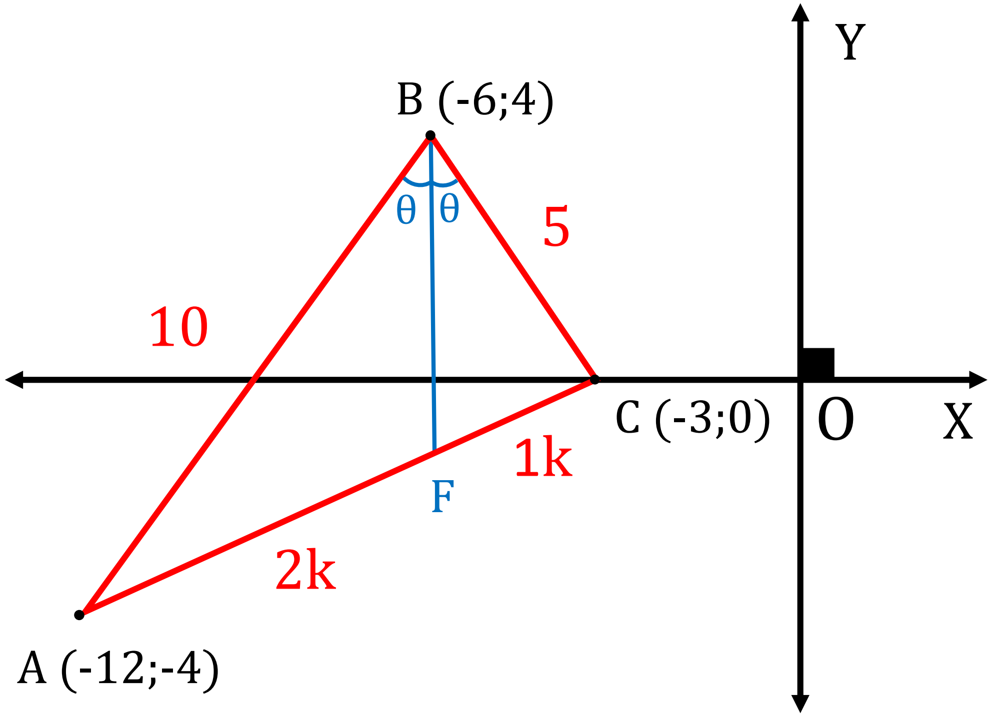


$$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$$

Ejemplo:

Los vértices de un triangulo son A(-12;-4),B(-6;4) y C(-3;0), la bisectriz del ángulo B intersecta al lado $\overline{AC}$ en F. Hallar las coordenadas de F.

A) (-6 ; -4/3) B) (-4 ; -2/3) C) (-8;-6)
D) (-12 ; 2/3) E) (-6 ; 1/3)



✓ $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} \Longrightarrow AB = 10$

✓ $BC = \sqrt{3^2 + 4^2} \Longrightarrow BC = 5$

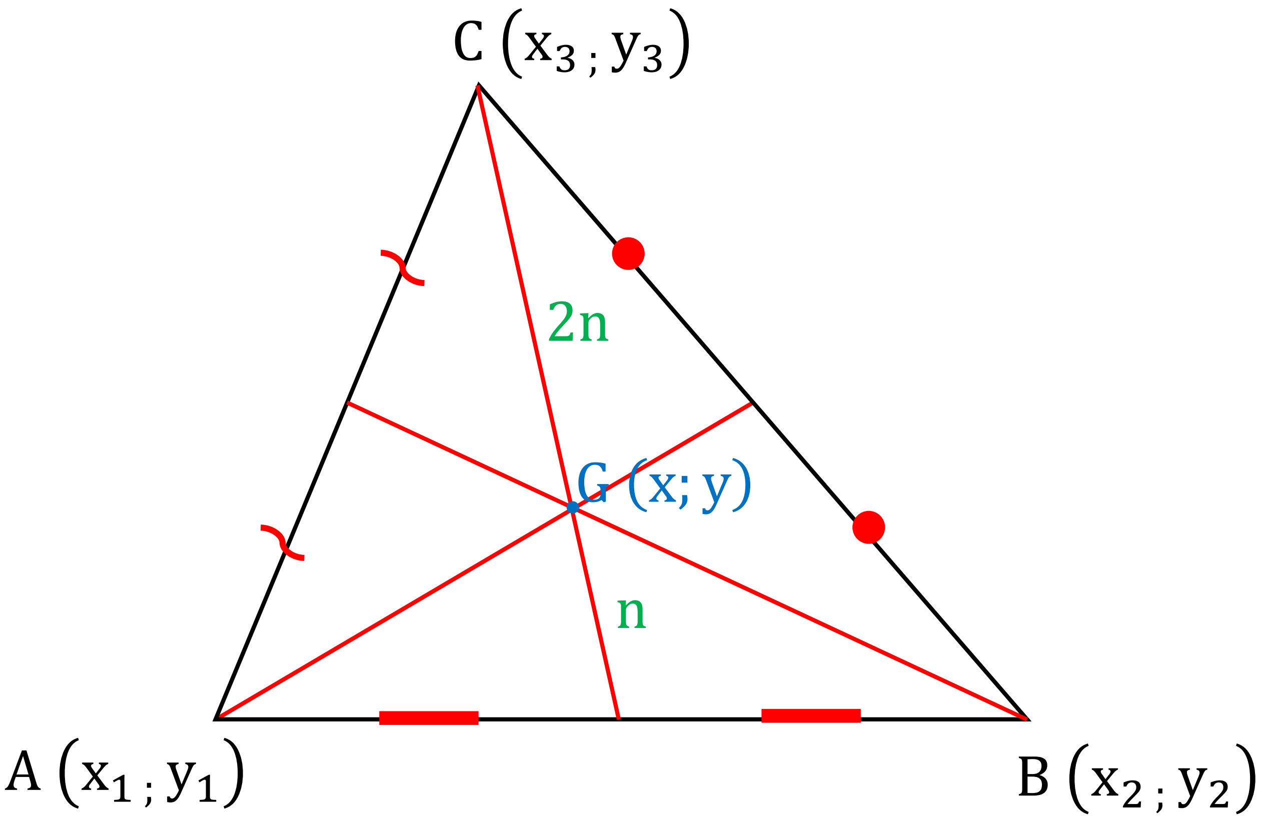
- Hallando F:

$$F\left(\frac{2(-3;0) + 1(-12;-4)}{2+1}\right)$$

$$F\left(\frac{(-6;0) + (-12;-4)}{3}\right) \Longrightarrow F\left(-6; -\frac{4}{3}\right)$$

CLAVE: A

6.-Coordenadas del Baricentro:



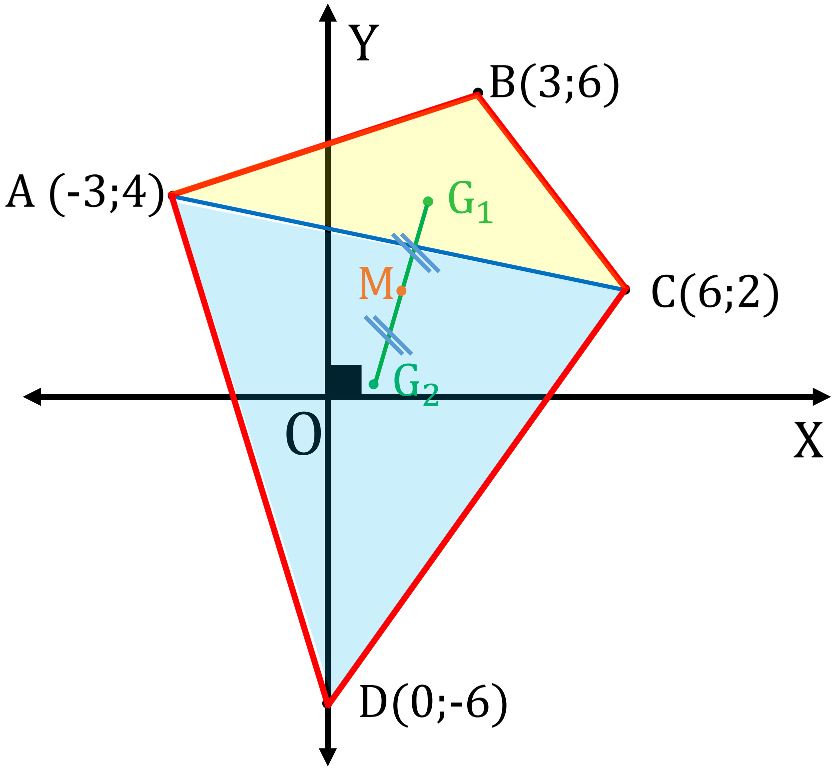
$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

6.1.-Ejemplo:

Los vértices de un cuadrilátero son A(-3;4),B(3;6),C(6;2) y D(0;-6). Se traza la diagonal $\overline{AC}$ y se determinan los baricentros G_1 y G_2 de los triángulos ABC y ACD, respectivamente. Calcular el punto medio de $\overline{G_1G_2}$.

~~A)~~ $\left(\frac{3}{2};2\right)$ B) $\left(\frac{1}{2};3\right)$ C) $\left(\frac{5}{4};1\right)$ D) $\left(\frac{7}{3};\frac{1}{2}\right)$ E) $\left(\frac{5}{3};\frac{3}{2}\right)$



✓ Hallando G_1 y G_2 :

$$G_1\left(\frac{-3+3+6}{3};\frac{4+6+2}{3}\right) \Longrightarrow G_1(2;4)$$

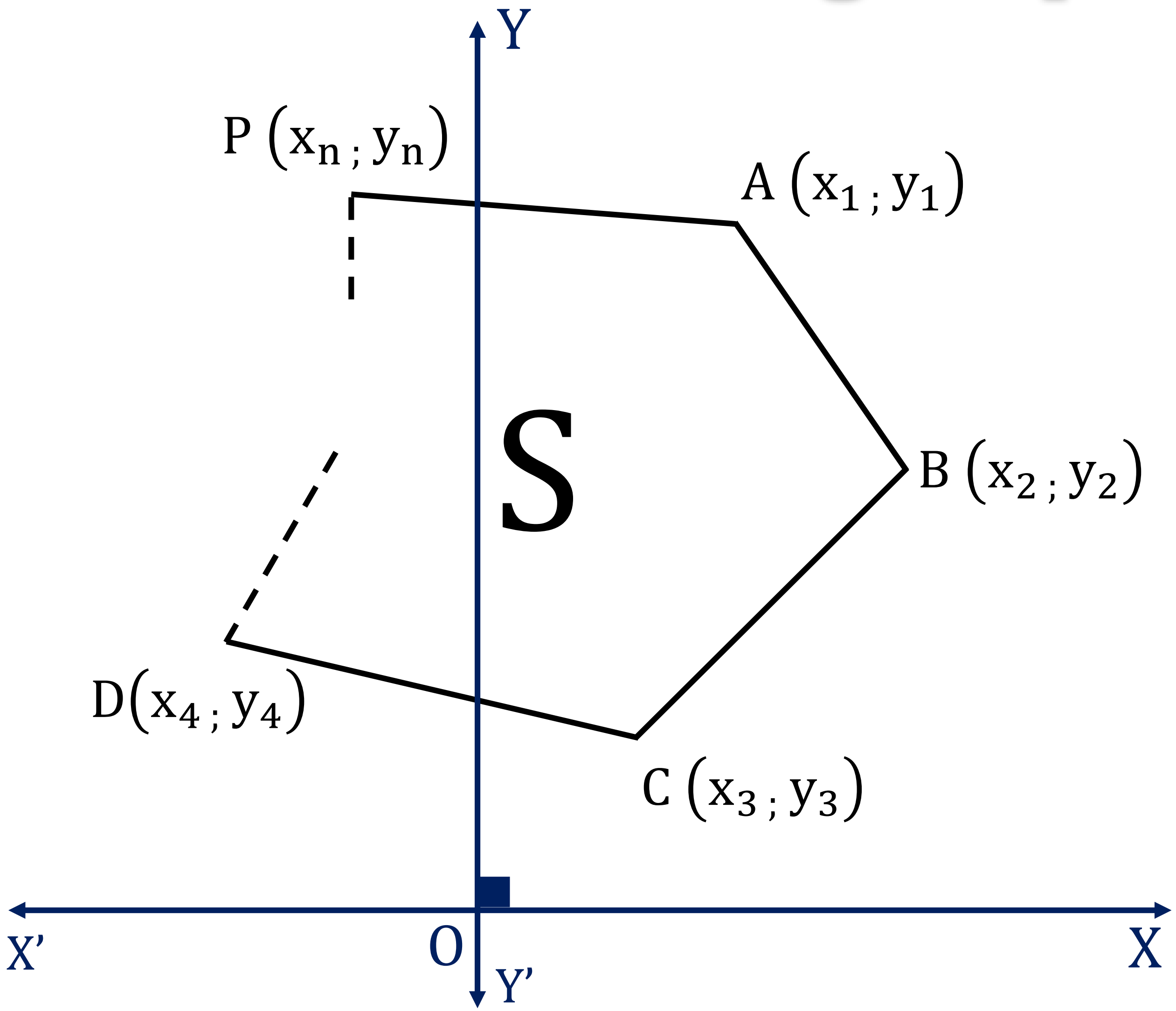
$$G_2\left(\frac{-3+6+0}{3};\frac{4+2-6}{3}\right) \Longrightarrow G_2(1;0)$$

✓ Hallando M: Punto medio de $\overline{G_1G_2}$

$$M\left(\frac{2+1}{2};\frac{4+0}{2}\right) \Longrightarrow M\left(\frac{3}{2};2\right)$$

CLAVE: A

7.-Área de una región poligonal:



$$\begin{array}{cc|cc|cc}
 & & x_1 & y_1 & & \\
 & x_n\cdot y_1 & x_n & y_n & x_1\cdot y_n & \\
 & \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \\
 & & x_4 & y_4 & & \\
(+) & x_3\cdot y_4 & x_3 & y_3 & x_4\cdot y_3 & (+) \\
 & x_2\cdot y_3 & x_2 & y_2 & x_3\cdot y_2 & \\
 & x_1\cdot y_2 & x_1 & y_1 & x_2\cdot y_1 & \\
\hline
 & I & & & D &
\end{array}$$

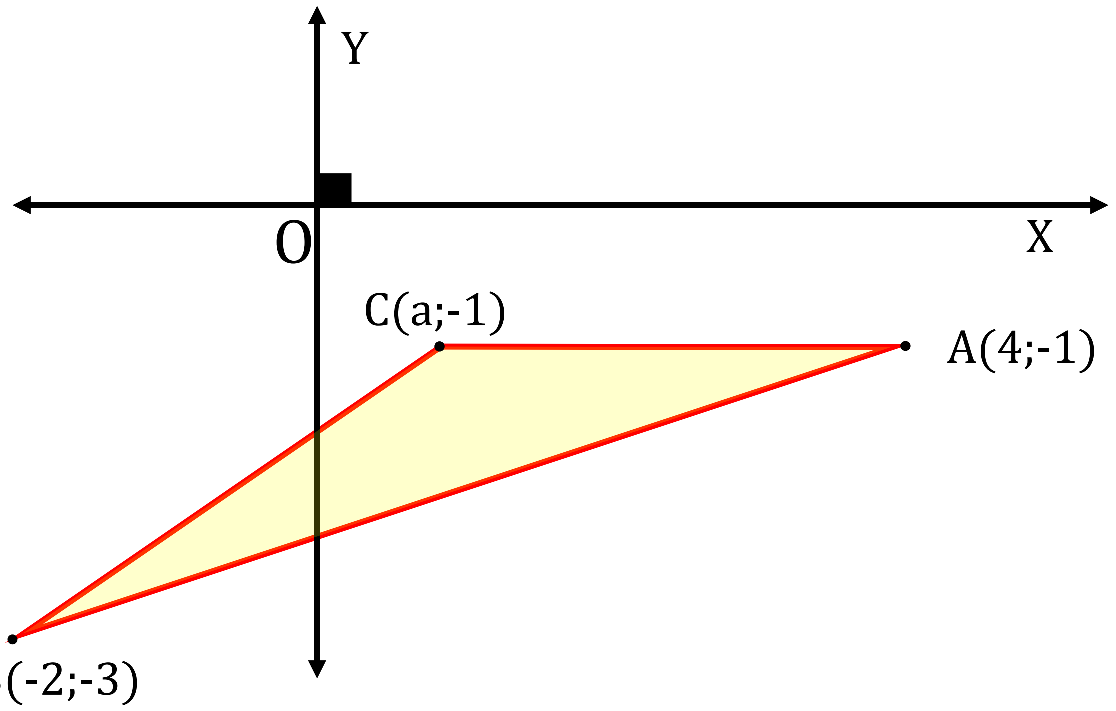
$$\boxed{S = \frac{D - I}{2}}$$

❖ OBSERVACIÓN: Se coloca valor absoluto, si uno de los vértices es desconocido.

7.1.-Ejemplo:

En un triangulo ABC: A(4;-1),B(-2;-3) y C(a;-1). Si su área es “S”. Calcular: $\frac{1}{a-S}$

A) $\frac{1}{2}$ ~~B)~~ $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$ E) 4



$$(+)\downarrow \begin{array}{c} -a \\ 2 \\ -12 \\ \hline -a-10 \end{array} \quad \left| \begin{array}{cc} 4 & -1 \\ a & -1 \\ -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} -4 \\ -3a \\ 2 \\ \hline -2-3a \end{array} \downarrow(+)$$

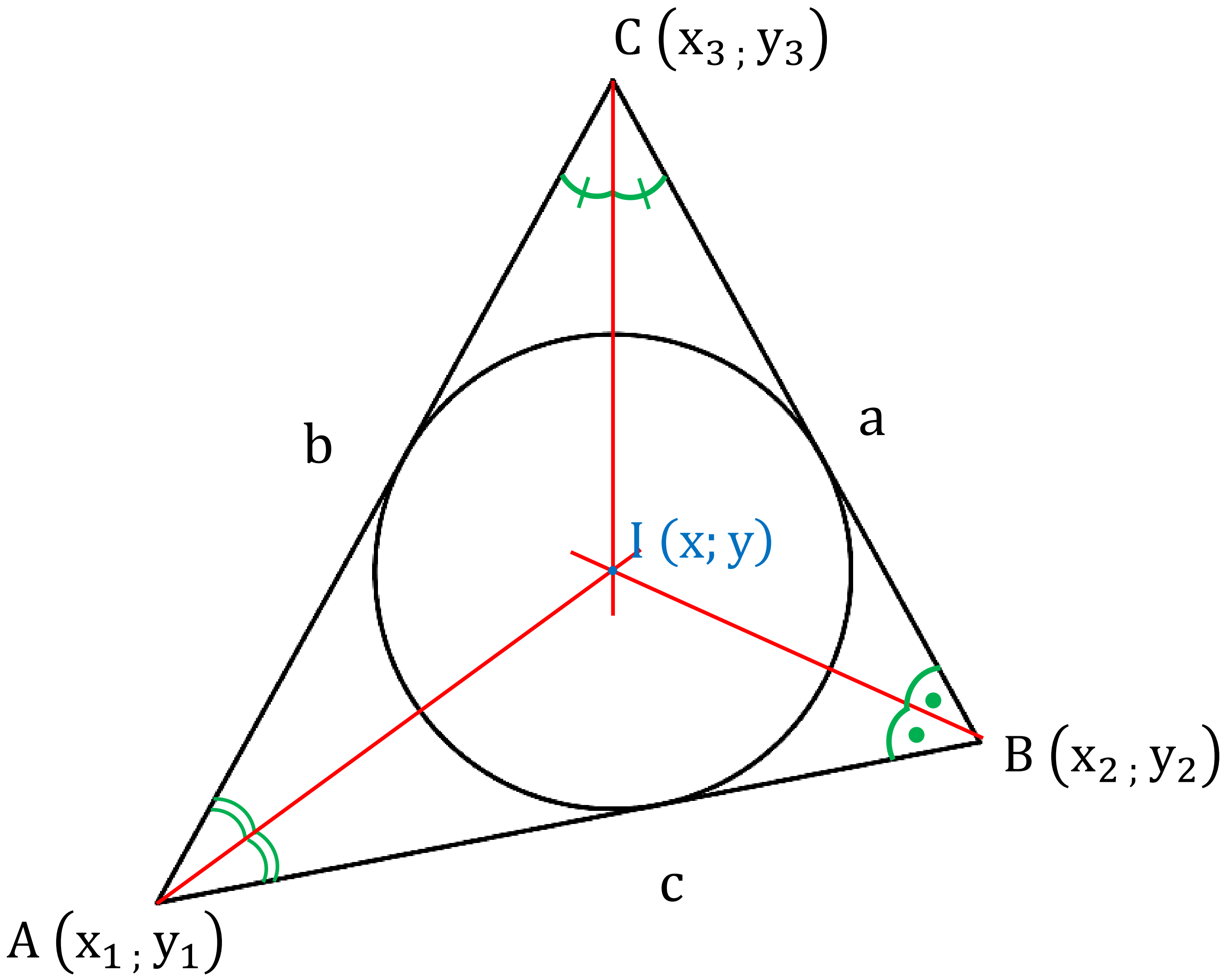
$$S = \frac{|-2-3a-(-a-10)|}{2} \Longrightarrow S = |4-a|$$

✓ S= 4-a ∨ S= -4+a $\Longrightarrow$ $\frac{1}{a-S} = \frac{1}{4}$

S+a = 4 a-S=4

CLAVE: B

8.-Coordenadas del Incentro:

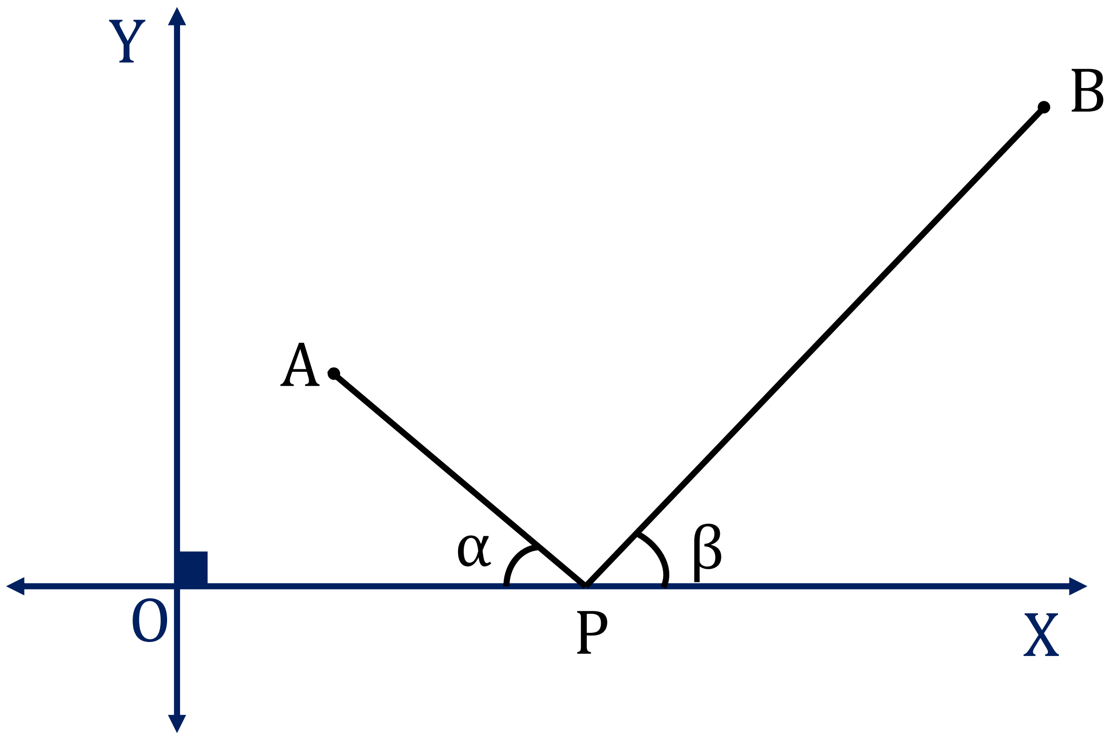


$$x = \frac{x_1 . a + x_2 . b + x_3 . c}{a + b + c}$$

$$y = \frac{y_1 . a + y_2 . b + y_3 . c}{a + b + c}$$

❖ Observación:

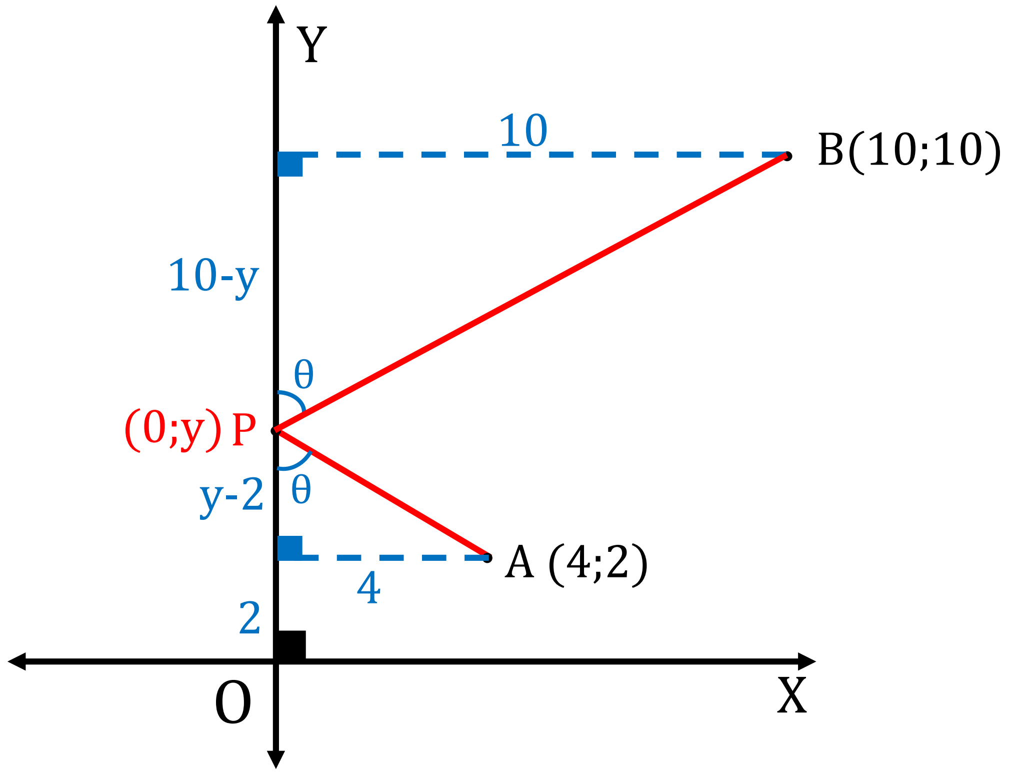
i. Si $\overline{AP} + \overline{PB}$ es mínimo $\Longrightarrow$ $\boxed{\alpha = \beta}$



Ejemplo:

Desde el punto A(4;2) se quiere llegar al punto B(10;10) tocando primero el eje Y y recorriendo el menor espacio posible. Determine las coordenadas del punto de contacto con el eje Y.

A) $\left(0;\frac{23}{7}\right)$ ~~B)~~ $\left(0;\frac{30}{7}\right)$ C) $\left(0;\frac{15}{7}\right)$ D) $\left(0;\frac{22}{7}\right)$ E) $\left(0;\frac{29}{7}\right)$



✓ $\overline{AP} + \overline{PB}$ es mínimo

- $\text{Tan}\theta = \dfrac{10}{10-y} = \dfrac{4}{y-2}$

$$5y - 10 = 20 - 2y$$

$$7y = 30$$

$$y = \frac{30}{7}$$

$$\therefore P\left(0;\frac{30}{7}\right)$$

CLAVE: B